Geometría: Introducción

Talleres de Preparación para la Olimpiada

Clase del 27/10/2017

Nota: Los ángulos vienen dados de la manera natural, módulo π.

Proposición 1: Sea $\triangle ABC$ triángulo de circuncentro O.
0. Los ángulos suman π.
1. Las mediatrices de los lados concurren en un punto (circuncentro), que es además el centro de la circunferencia circunscrita.
2. Las alturas concurren. (ortocentro)
3. Las medianas concurren. (baricentro)
4. Las bisectrices interiores de los ángulos concurren en un punto (incentro), que es además el centro de la circunferencia inscrita.
5. Las bisectrices exteriores de dos de los ángulos y la bisectriz interior del tercero concurren. (exincentros)
6. (**Teorema del Ángulo Central**) $\angle BOC = 2\angle BAC$

Las demostraciones se dejan como ejercicio al lector.

Def 1: Se dice potencia de un punto P respecto de una circunferencia ω de centro O y radio r al valor de la expresión $PO^2 - r^2$, denotada $PoP(P, \omega)$.

Def 2: Se llama eje radical de las circunferencias ω y ω' al lugar geométrico de los puntos P tales que $PoP(P, \omega) = PoP(P, \omega')$.

Prop 2: Sea r una recta que pasa por P y corta a la circunferencia ω en A y B entonces $PoP(P, \omega) = PA \cdot PB$.

Def 3: Un cuadrilatero se dice cíclico si es inscriptible en una circunferencia.

Prop 3: Dado un cuadrilatero $ABCD$, las siguientes son equivalentes:
- $ABCD$ es cíclico.
- $\angle ABC = \angle ADC$
- $PA \cdot PB = PC \cdot PD$, con $P = AB \cap CD$.

The Incenter/Excenter Lemma: Sea $\triangle ABC$ un triángulo con incentro I, A-exincentro I_A y sea L el punto medio del arco BC. Entonces L es el centro de una circunferencia que pasa por I, I_A, B, C.

1 PROBLEMAS

0. Sea ABC un triángulo de incentro I. Demuestra que el circuncentro del triángulo cuyos vértices son los centros de los triángulos $\triangle IAB$, $\triangle IBC$, $\triangle ICA$ coincide con el circuncentro de $\triangle ABC$.

1. Sean E y D los pies de las alturas por B y C de $\triangle ABC$ con circunferencia circunscrita ω. Sea M el punto medio de BC. Prueba que:
$i)$ Sea l la recta paralela a BC por A. l es tangente a ω.
$ii)$ Las rectas ME, MD son tangente a ω, por E y D respectivamente.

2. La circunferencia inscrita al triángulo ABC, es tangente a los lados AB y AC en D y E respectivamente. Sea I su incentro y O el circuncentro de BCI. Prueba que $\angle ODB = \angle OEC$.

3. Sea ABC tal que $2BC = AB + AC$ y denoten I y ω su incentro y circunferencia circunscrita respectivamente. Sea D la intersección de AI y ω (A, D distintos). Prueba que I es el punto medio del segmento AD.

4. Sea ABC un triángulo agudo con ortocentro H. Sean D, E, F los pies de las alturas por A, B, C a los lados opuestos respectivamente. Prueba que el punto medio de AH se encuentra en la circunferencia circunscrita a $\triangle DEF$.

5. Sea H el ortocentro del triángulo agudo ABC. La circunferencia τ_A centrada en el punto medio de BC y que pasa por H interseca BC en A_1, A_2. Análogamente definimos B_1, B_2, C_1 y C_2. Probar que $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ son concíclicos.

6. Sea ABC un triángulo de incentro I y A-exincentro I_A. Sea M el punto medio del arco BC que no contiene a A, y sea N el punto medio del arco MBA. Las rectas NI y NI_A intersecan a ABC en S y T. Prueba que las rectas ST, BC y AI son concurrentes.

7. En un triángulo agudo ABC, con $\angle B$ mayor que $\angle C$. Sea M el punto medio de BC y sean E y F los pies de las alturas desde B y C , respectivamente. Sean K y L los puntos medios de ME y MF, respectivamente, y sea T en KL tal que $TA||BC$. Prueba que $TA = TM$.

mas y mejor en bibliografía:
$http : //web.evanchen.cc/handouts/Directed - Angles/Directed - Angles.pdf$
$http : //web.evanchen.cc/handouts/Fact5/Fact5.pdf$
$https : //www.maa.org/sites/default/files/pdf/ebooks/pdf/EGMO\_chapter2.pdf$